

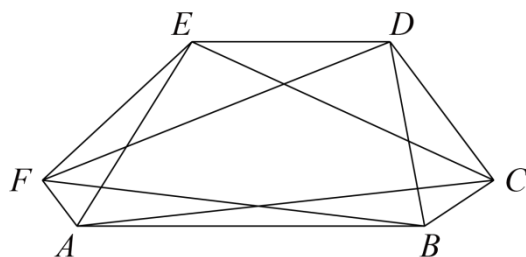
8 一題多解的幾何問題

在這裡，我們將針對兩則幾何問題提出多種不同的解法，讓讀者耳目一新。特別是第二則幾何問題，在一般的幾何書籍上容易發現，但是它的解法大致只有一種。在此提供其它解法供各位欣賞。

8.1 平行六邊行問題

定理 8.1 下圖是一個平行六邊形，即 AB 與 DE 平行， BC 與 EF 平行， CD 與 FA 平行。

試證：三角形 ACE 與三角形 BDF 的面積相等。



【證一】把 $ABCDEF$ 中所有對角線都連接起來得到：

$$\begin{aligned} \Delta ACE &= ABCDEF - \Delta AEF - \Delta ABC - \Delta CDE \\ &= ABCDEF - (ABEF - \Delta ABE) - (ABCD - \Delta CDA) - (CDEF - \Delta CEF) \\ &= ABCDEF - (ABEF + ABCD + CDEF) + \Delta ABE + \Delta CDA + \Delta CEF; \\ \Delta BDF &= ABCDEF - \Delta BCD - \Delta DEF - \Delta FAB \\ &= ABCDEF - (ABCD - \Delta ABD) - (CDEF - \Delta CDF) - (ABEF - \Delta BEF) \\ &= ABCDEF - (ABEF + ABCD + CDEF) + \Delta ABD + \Delta CDF + \Delta BEF. \end{aligned}$$

因為

$$AF // CD, AB // DE, BC // EF,$$

所以（同底等高）

$$\Delta CDA = \Delta CDF, \Delta ABE = \Delta ABD, \Delta CEF = \Delta BEF.$$

綜合這些等式證得：三角形 ACE 與三角形 BDF 的面積相等。

【證二】如下圖所添的補助線得知：針對梯行 $ABDE$ ，我們得到

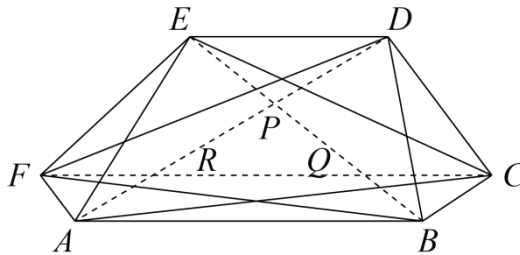
$$\triangle APE = \triangle BPD.$$

同理有

$$\triangle BQF = \triangle CQE, \triangle ARC = \triangle DRF.$$

由此得到

$$\begin{aligned} \triangle ACE &= \triangle ARC + \triangle APE + \triangle CQE + \triangle PQR \\ &= \triangle DRF + \triangle BPD + \triangle BQF + \triangle PQR \\ &= \triangle BDF. \end{aligned}$$



【證三】如下圖：將平行六邊形 $ABCDEF$ 向外延長成三角形 MNO 。因為

$$BC \parallel NO, AF \parallel OM, ED \parallel MN,$$

所以可以令

$$\begin{aligned} \frac{MB}{MN} &= \frac{MC}{MO} = \frac{a}{1}, \\ \frac{NA}{MN} &= \frac{NF}{NO} = \frac{b}{1}, \\ \frac{OE}{ON} &= \frac{OD}{OM} = \frac{c}{1}. \end{aligned}$$

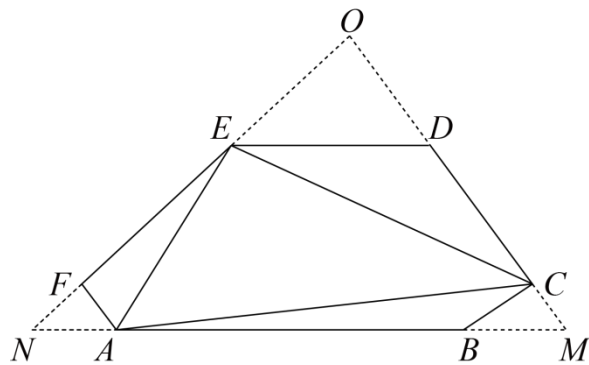
由此得到

$$\begin{aligned} \triangle ACE &= \triangle MNO - \triangle MAC - \triangle NAE - \triangle OCE \\ &= (1 - a(1 - b) - b(1 - c) - c(1 - a))\triangle MNO \\ &= (1 - a - b - c + ab + bc + ca)\triangle MNO. \end{aligned}$$

同理可得

$$\triangle BDF = (1 - a - b - c + ab + bc + ca)\triangle MNO,$$

得證。

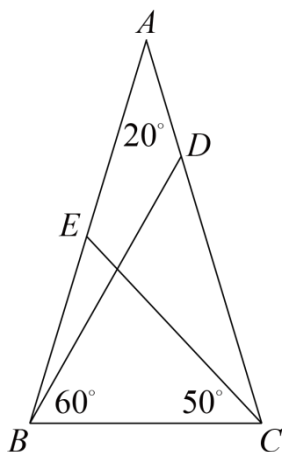


8.2 求角度問題

定理 8.2 如下圖：三角形 ABC 是一個等腰三角形且

$$\angle A = 20^\circ, \angle DBC = 60^\circ, \angle ECB = 50^\circ$$

試求 $\angle EDB = ?$



【解一】 如下圖，在 AC 上取一點 K 使得 $\angle KBC = 20^\circ$ 。

(1) $BK = BC$ 。

這是因為 $\angle BKC = 180^\circ - 20^\circ - 80^\circ = 80^\circ = \angle BCK$ 。

(2) 三角形 KBE 為正三角形。

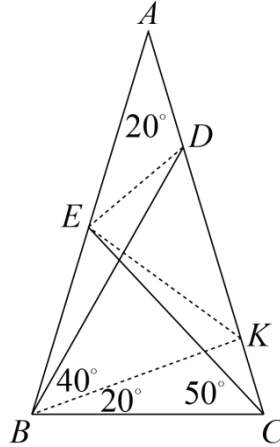
由 $\angle CEB = 180^\circ - 80^\circ - 50^\circ = 50^\circ = \angle BCE$ 得 $BC = BE$ ，又 $\angle KBE = 80^\circ - 20^\circ = 60^\circ$ 。綜

合得到：三角形 KBE 為正三角形。

(3) $KB = KD$ 。

由 $\angle KDB = \angle CDB = 180^\circ - 60^\circ - 80^\circ = 40^\circ = \angle KBD$ 得到

(4) B, E, D 在以 K 為圓心， KD 為半徑的圓上。因此，圓周角 $\angle EDB = \frac{1}{2} \angle EKB = \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ$ 。



【解二】如下圖，以 A 為圓心， AB 為半徑畫一個弧，並在此等腰三角形 ABC 的左右各劃相等的三角形 AC_1B 與 ACB_1 。取 H 為線段 AB_1 的中點。(注意：此時 C_1E, ED, DH 是三條線段，不一定在同一直線上，我們將證明： C_1, E, D, H 四點共線)

(1) 三角形 AC_1B_1 為正三角形。

這是因為 $\angle C_1AB_1 = 3\angle BAC = 60^\circ$ 及 $AC_1 = AB_1$ 。

(2) 點 C_1, E, D, H 四點共線，且 $C_1H \perp AB_1$ 。

因為 H 是 AB_1 的中點，且三角形 AC_1B_1 為正三角形，所以直線 C_1H 垂直且平分線段

AB_1 (亦平分 $\angle AC_1B_1$)。因為 $\angle AC_1E = \angle ACE = 80^\circ - 50^\circ = 30^\circ$ ，所以 E 在直線 C_1H 上。

針對三角形 ADB ，因為 $\angle ABD = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ = \angle DAB$ ，所以 $AD = DB = DB_1$ 。因

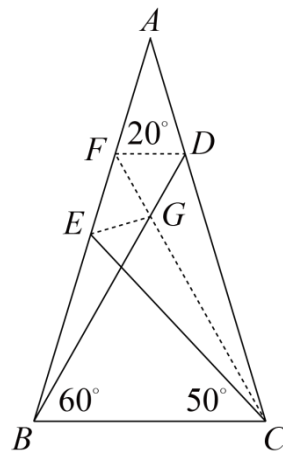
此， D 亦在 C_1H 上。

(3) $\angle EDB = 30^\circ$ 。

由此得到 $\theta = 30^\circ$ 。

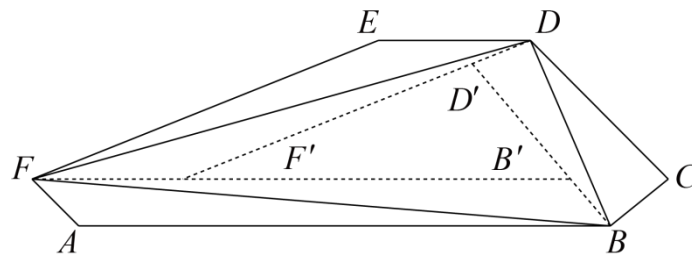
習題 8.1 巧添如下的補助線之後，試完成：

- (1) 三角形 GFD 與 GBC 是正三角形。
- (2) 三角形 BEC , BEG 與 EFG 是等腰三角形。
- (3) 三角形 EFD 與 EGD 全等。
- (4) 計算 $\angle EDB = ?$



動手玩數學

如下圖：虛線分別與平行六邊形的邊平行。試將三角形 BDF 的面積以六邊形 $ABCDEF$ 及三角形 $B'D'F'$ 的面積來表示，並依此方式證明定理 8.1（提示：考慮 $B'D'$, $D'F'$, $F'B'$ 的長度）。



挑戰題

三角形 ABC 是一個等腰三角形且 $\angle A = 20^\circ$, $AB = AC$ 。 P 是 AC 上滿足 $AP = BC$ 的一點。

試求 $\angle PBC = ?$ (模仿【解二】的方法)